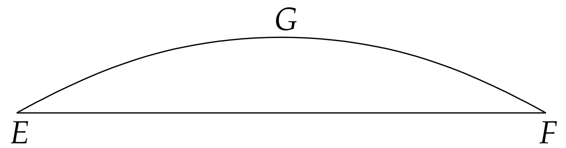
Über die wundersamen Eigenschaften der Curvae elasticae, die in der Gleichung $y = \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ enthalten ist*

Leonhard Euler

§1 Es sei *EFG* ein elastisches Stück Blech, welches man mithilfe eines zwischen den Punkten *E* und *F* befestigten Strickes zur Curva Elastica einbiege; dann aber, wenn der Strick bis dorthin zusammengezogen wird, bis schließlich die Winkel *F* und *E* rechte werden, entsteht die Curva elastica, die rechtwinklig genannt zu werden pflegt und in der Gleichung

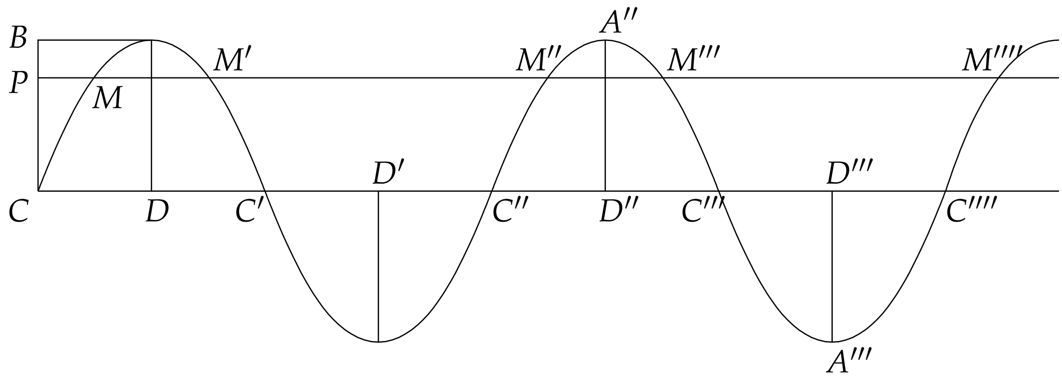
$$y = \int \frac{xx}{\sqrt{1-x^4}} \mathrm{d}x$$

enthalten ist, von welcher ich einige völlig einzigartige und zu bewundernde Eigenschaften hier erwähnen werde.



*Originaltitel: „De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione $y = \int (xx\mathrm{d}x)/\sqrt{1-x^4}$ contentae ", erstmals publiziert in „*Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae* 1786, 1786, pp. 34-61", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 21, pp. 91 - 118", Eneström-Nummer E605, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§2 Es sei nun CAC' eine solche Curva elastica, die in beiden Punkten der Gerade CC', die den Strick meint, einen rechten Winkel hat; und es ist klar, dass die zum Mittelpunkt D zwischen den beiden Grenzen C und C' lotrecht gezogene Gerade AD der Durchmesser der Kurve sein wird und der Punkt A quasi den Scheitel bezeichnet. Wenn dann aber von C aus zur Gerade CC' das



Lot CB gefällt wird, welches wir hier als Achse betrachten werden, und wir bei ihm die Abszisse $CP = x$ nehmen und die Ordinate $PM = y$ nennen, so wird, nachdem die Höhe $AD = CB = 1$ gesetzt wurde, wie bekannt ist,

$$\mathrm{d}y = \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

sein; wenn daher der Bogen der Kurve CM gleich s gesetzt wird, wird

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

werden und es lässt sich so aus der Natur der Sache wie aus dieser Gleichung einsehen, dass diese ganze Kurve aus unendlich vielen und über der auf beiden Seiten ins Unendliche fortgeführten Gerade CC''' beschriebenen und einander gleichen Abschnitten CAC', CAC'', CAC''', etc besteht, woher auch diese ganze Kurve unendlich viele Durchmesser AD, $A'D'$, $A''D''$, etc haben wird und genauso viele Scheitel A, A', A'', A''', etc ober wie unterhalb (der Geraden CC''). Die Punkte C, C', C'', C''', etc aber können, weil ja um die einzelnen von diesen herum die Kurve in gleicher Weise abwechselnd ausgedehnt wird. So wie wir aber die Höhen dieser einzelnen Abschnitte AD, $A'D'$, $A''D''$, etc mit der Einheit bezeichnet haben, wollen wir die Halbhöhe des Abschnittes

$CD = AB = a$ setzen, die Bögen selbst aber $CA = C'A = C'A' = \text{etc} = c$ und werden, wie diese beiden Größen a und c sich zur Einheit oder der Höhe AD erhalten, anschließend genauer untersuchen.

§3 Nachdem diese Dinge über sich auf diese Kurve beziehenden Größen bemerkt worden sind, wollen wir die variablen Größen $y = PM$ und $CM = s$ auf die Abszisse $CP = x$ beziehen, woher sofort klar ist, dass so y wie s unendlichwertige Funktionen derselben Abszisse $CP = x$ sein werden. Weil nämlich die Ordinate PM auf beiden Seiten ins Unendliche fortgesetzt die Kurve in unendlich vielen Punkten M, M', M'', M''', etc schneidet, wird die Ordinate y unendlich viele Werte enthalten, natürlich PM, PM', PM'', PM''', PM'''', etc, die aus aus der anfänglichen $PM = y$ und der konstanten Größe $AB = CD = a$

$$\begin{aligned} &PM = y, \quad PM' = 2a - y, \quad PM'' = 4a + y, \quad PM''' = 6a - y, \\ &PM'''' = 8a + y, \quad PM''''' = 10a - y, \quad \text{etc} \end{aligned}$$

sein werden, welche Werte alle in diesen allgemeinen Formeln enthalten sind

$$4ia + y \quad \text{und} \quad (4i + 2)a - y,$$

wo der Buchstabe i alle ganzen positiven wie negativen Zahlen bezeichnen kann. Auf ähnliche Weise werden derselben Abszisse $CP = x$ unendlich viele Bögen der Kurve entsprechen, die

$$CM = s, \quad CAM = 2c - s, \quad CAA'M = 4c + s, \quad CAA'A''M''' = 6c - s, \quad \text{etc}$$

sein werden, die alle in diesen beiden allgemeinen Formeln

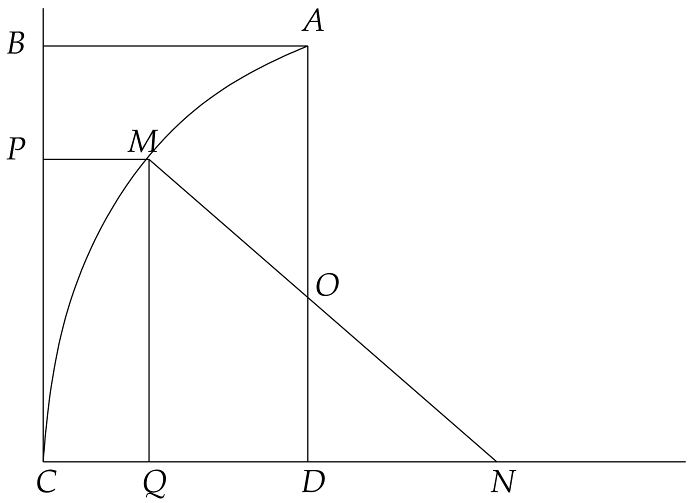
$$4ic + s \quad \text{und} \quad (4i + 2)c - s$$

enthalten sind, indem man für i nacheinander alle positiven wie negativen Zahlen nimmt.

§4 Es wird also genügen, allein den Abschnitt CMA dieser Kurve betrachtet zu haben, weil ja alle übrigen ihm gleich sind, für welchen wir $CB = AD = 1$, $AB = CD = a$ und den Bogen $CMA = c$ gesetzt haben. Wenn dann aber für den unbestimmten Punkt M die Koordinaten $CP = x$, $PM = y$ und der Bogen $CM = s$ genannt werden, wird

$$\mathrm{d}y = \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

sein. Nachdem diese Dinge festgesetzt worden sind, wollen wir an der Kurve im Punkt N eine Normale MN konstruieren, die die fortgesetzte Basis CD im



Punkt N schneidet. Wenn daher zur Basis das Lot $MQ = x$ gefällt wird, wird wegen $CQ = y$ das Intervall

$$QN = \frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\sqrt{1-x^4}}{x}$$

sein, und die Normale selbst

$$MN = \frac{x\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{x},$$

sodass das Rechteck $MQ \cdot MN = 1 = AD^2$ ist. Wenn daher der Winkel $CNM = \varphi$ genannt wird, der die Amplitude der Bogens CM misst, wird

$$\sin\varphi = xx, \quad \cos\varphi = \sqrt{1-x^4}, \quad \tan\varphi = \frac{xx}{\sqrt{1-x^4}}$$

sein.

§5 Wir wollen nun auch den Radius des Mündleins der Kurve im Punkt M suchen, welcher MO sei; zu diesem Ziel wollen wir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P = \frac{xx}{\sqrt{1-x^4}}$$

setzen, woher

$$\sqrt{1+pp} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

wird; daher werde weiter

$$\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = xx = q$$

und es wird, wie bekannt ist, der Radius dieses Mündleins gleich

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{2x}$$

sein; und so wird

$$MO = \frac{1}{2x}$$

sein und daher

$$MO = \tfrac{1}{2}MN,$$

sodass der Mittelpunkt der Kurve auf den Mittelpunkt der Normale MN fällt; daraus ist aber klar, dass der Radius der Mündleins MO dem Intervall $MQ = x$ umgekehrt proportional ist. Weil nämlich die Kraft, die das Stück Blech im Punkt C spannt, die Richtung MN hat, wird ihr Wert in Anbetracht des Punktes M der mit $QM = x$ multiplizierten Kraft gleich sein, der nach der Lehre der Elastizität dem Radius des Mündleins in M umgekehrt proportional gleich sein muss. Es ist also klar, dass der Radius des Mündleins im Punkt C selbst unendlich ist, in der anderen Grenze $A = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}AD$ aber und so auch in diesem Punkt A wird die Kurve am größten sein.

§6 Nun wollen wir auch sehen, wie aus einer gegebenen Abszisse $CP = x$ so die Ordinate $PM = y$ wie der Bogen $CM = s$ näherungsweise durch unendliche Reihen ausgedrückt werden kann, das kann auf zweifache Weise geleistet werden. Der erste höchst offensichtliche besteht darin, dass die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = (1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe aufgelöst wird, welche

$$1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^8 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^{16} + \text{etc}$$

sein wird, woher man durch Integration

$$PM = y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15}x^{15} + \text{etc}$$

berechnet, dann ist in der Tat auch der Bogen

$$CM = s = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13}x^{13} + \text{etc.}$$

Daher ist also klar, wenn die Abszisse sehr klein war, dass dann näherungsweise $y = \frac{1}{3}x^3$ und $s = x$ sein wird. Wenn wir aber $x = 1$ nehmen, werden die beiden Reihen durch die Größe a und c so ausgedrückt werden, dass

$$a = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} + \text{etc}$$

$$c = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13} + \text{etc}$$

ist. Diese Reihe konvergiert aber allzu langsam, als dass daher die Werte der Buchstaben a und c hinreichend genau bestimmt werden können.

§7 Die andere erst nicht offensichtliche Art besteht darin, dass man

$$y = \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = u\sqrt{1-x^4}$$

setzt; nach der Differentation wird also

$$xx\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(1-x^4) - 2ux^3\mathrm{d}x$$

sein oder

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1-x^4) = 2ux^3 - xx = 0.$$

Man setze nun diese Reihe an

$$u = \alpha x^3 + \beta x^7 + \gamma x^{11} + \delta x^{15} + \varepsilon x^{19} + \text{etc,}$$

weil wir ja schon wissen, wenn x sehr klein war, dass dann $y = \frac{1}{3}x^3$ werden muss und daher auch $u = \frac{1}{3}x^3$; darauf ist aus der Form der Gleichung klar, dass in der Reihe die Exponenten von x immer um 4 wachsen müssen. Nachdem also diese Reihe eingesetzt worden ist, gelte die Entwicklung:

$$\begin{array}{rcccccccccccl}
\frac{du}{dx} & = & 3\alpha xx & + & 7\beta x^6 & + & 11\gamma x^{10} & + & 15\delta x^{14} & + & 19\varepsilon x^{18} & +\text{etc.} \\
-\frac{x^4 du}{dx} & = & & - & 3\alpha x^6 & - & 7\beta x^{10} & - & 11\gamma x^{14} & - & 15\delta x^{18} & -\text{etc.} \\
-2ux^3 & = & & - & 2\alpha x^6 & - & 2\beta x^{10} & - & 2\gamma x^{14} & - & 2\delta x^{18} & -\text{etc.} \\
-xx & = & -xx
\end{array}$$

Nachdem also die einzelnen Glieder 0 gesetzt wurden, wird

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 7}, \quad \delta = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 11}, \quad \delta = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}, \quad \text{etc}$$

werden, weshalb wir

$$\gamma = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 7}x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 11}x^{11} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}x^{15} + \text{etc}\right)\sqrt{1-x^4}$$

haben werden.

§8 Wenn wir auf ähnliche Weise

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = v\sqrt{1-x^4}$$

setzen, wird man zu dieser Gleichung gelangen:

$$\frac{dv}{dx}(1-x^4) - 2vx^3 - 1 = 0,$$

wo wir nun

$$v = \alpha x + \beta x^5 + \gamma x^9 + \delta x^{13} + \varepsilon x^{17} + \zeta x^{21} + \text{etc}$$

setzen wollen, deren Entwicklung man so darstelle:

$$\begin{array}{rcccccccccccl}
\frac{dv}{dx} & = & \alpha & + & 5\beta x^4 & + & 9\gamma x^8 & + & 13\delta x^{12} & + & 17\varepsilon x^{16} & +\text{etc.} \\
-\frac{x^4 dv}{dx} & = & & - & \alpha & - & 5\beta & - & 9\gamma & - & 13\delta & -\text{etc.} \\
-2vx^3 & = & & - & 2\alpha & - & 2\beta & - & 2\gamma & - & 2\delta & -\text{etc.} \\
-1 & = & -1
\end{array}$$

Daher findet man die Koeffizienten

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 9}, \quad \delta = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{5 \cdot 9 \cdot 13}, \quad \varepsilon = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17}, \quad \text{etc},$$

woher man berechnet, dass

$$s = \left(x + \frac{3}{5}x^5 + \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 9}x^9 + \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{5 \cdot 9 \cdot 13}x^{13} + \text{etc} \right) \sqrt{1 - x^4}$$

sein wird. Diese Reihen lassen sich aber natürlich nicht benutzen, um die Werte der Buchstaben a und c zu finden; für $x = 1$ gesetzt verschwindet nämlich die Formel $\sqrt{1 - x^4}$, dann wachsen aber die Reihen selbst ins Unendliche.

§9 Für das Erkennen der Buchstaben a und c müssen aber andere herzuholende Methoden, dass die Integrale dieser Formeln

$$\int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}} \quad \text{und} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

nur für den Fall gesucht werden, in dem nach der Integration $x = 1$ wird, angewandt werden. Für dieses Ziel stelle man die Formel $\frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$ so dar

$$\frac{(1 + xx)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - x^4}}$$

und verwandle den Zähler in eine Reihe, welche

$$1 - \frac{1}{2}xx + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 - \text{etc}$$

sein wird, sodass wir anstelle von $\frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$ diese Reihe schreiben werden

$$\frac{1}{\sqrt{1 - xx}} \left(1 - \frac{1}{2}xx + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 - \text{etc} \right),$$

wodurch für y wie für s die folgenden zu integrierenden Formeln auftauchen werden:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - xx}}, \quad \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - xx}}, \quad \int \frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - xx}}, \quad \text{etc}$$

§10 Die Integrale dieser Formeln werden aber hier nicht im Allgemeinen verlangt, sondern nur für den Fall, in dem nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird. In diesem Fall aber wissen wir, wenn $1 : \pi$ das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie bezeichnet, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x^6\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ist und so weiter; nach Einsetzen dieser Werte berechnen wir zuerst aus der Formel

$$y = \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{xx\mathrm{d}x(1+xx)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-xx}},$$

dass

$$a = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \text{etc}\right)$$

sein wird, aus der anderen Formel

$$s = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

aber berechnet man die Länge des ganzen Bogens

$$CA = c = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \text{etc}\right).$$

Aber auch diese Reihen sind für das Erkennen der wahren Werte der Größen a und c nicht geeignet genug.

§11 Es ist aber noch eine andere Methode übrig, dieselben Werte durch Produkte aus unendlich vielen Faktoren auszudrücken, deren Grundlage, obwohl sie von mir schon längst genauer erklärt worden ist, ich hier auf die folgende Weise kurz erörten will. Man betrachte nun diese Formel $z = x^n\sqrt{1-x^4}$ und weil

$$\mathrm{d}z = nx^{n-1}\mathrm{d}x\sqrt{1-x^4} - \frac{2x^{n+3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{nx^{n-1}\mathrm{d}x - (n+2)x^{n+3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist, wird andererseits durch Integrieren

$$x^n\sqrt{1-x^4} = n\int \frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} - (n+2)\int \frac{x^{n+3}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$$

sein; wenn daher diese Integrale nur für den Fall $x = 1$ gewünscht werden, wird

$$\int \frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n+2}{n} \int \frac{x^{n+3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

werden. Auf die gleiche Weise wird

$$\int \frac{x^{n+3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n+6}{n+4} \int \frac{x^{n+7}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

und

$$\int \frac{x^{n+7}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n+10}{n+8} \int \frac{x^{n+11}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

sein. Wenn wir daher auf diese Weise ins Unendliche aufsteigen, wird

$$\int \frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n+6}{n+4} \cdot \frac{n+10}{n+8} \cdot \frac{n+14}{n+12} \cdots \int \frac{x^{n+\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

sein.

§12 Wir wollen nun für n nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 einsetzen und es werden dir folgenden vier Reduktionen auf unendliche Produkte hervorgehen, natürlich im Fall $x = 1$:

$$\begin{array}{rlclcl}
\text{I.} & \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = & \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{19}{17} & \cdots \int \frac{x^{1+\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = c \\
\text{II.} & \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = & \frac{4}{2} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{16}{14} \cdot \frac{20}{18} & \cdots \int \frac{x^{2+\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = \frac{\pi}{4} \\
\text{III.} & \int \frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = & \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{11} \cdot \frac{17}{15} \cdot \frac{21}{19} & \cdots \int \frac{x^{3+\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = a \\
\text{IV.} & \int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = & \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{22}{20} & \cdots \int \frac{x^{4+\infty}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} & = \frac{1}{2}
\end{array}$$

§13 Hier ist natürlich zu bemerken, dass die letzten Integralformeln einander gleich sind. Weil nämlich im Allgemeinen

$$\int \frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n+2}{n} \int \frac{x^{n+3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist, wird für $n = \infty$ genommen

$$\int \frac{x^{\infty-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{x^{\infty+3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

sein. Wenn wir daher also eine beliebige dieser 4 Formeln durch eine andere teilen, heben sich die letzten Integralfaktoren gegenseitig auf und es wird

$$\begin{array}{lllll}
\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} & = & \frac{4c}{\pi} & = & \frac{2\cdot 3}{1\cdot 4}\cdot\frac{6\cdot 7}{5\cdot 8}\cdot\frac{10\cdot 11}{9\cdot 12}\cdot\frac{14\cdot 15}{13\cdot 16}\cdot\frac{18\cdot 19}{17\cdot 20}, \quad \text{etc}\\
\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{III}} & = & \frac{c}{a} & = & \frac{3\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 7}{5\cdot 9}\cdot\frac{11\cdot 11}{9\cdot 13}\cdot\frac{15\cdot 15}{13\cdot 17}\cdot\frac{19\cdot 19}{17\cdot 21}, \quad \text{etc}\\
\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{IV}} & = & 2c & = & \frac{3\cdot 4}{1\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 8}{5\cdot 10}\cdot\frac{11\cdot 12}{9\cdot 14}\cdot\frac{15\cdot 16}{13\cdot 18}\cdot\frac{19\cdot 20}{17\cdot 22}, \quad \text{etc}\\
\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{III}} & = & \frac{\pi}{4a} & = & \frac{3\cdot 4}{2\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 8}{6\cdot 9}\cdot\frac{11\cdot 12}{10\cdot 13}\cdot\frac{15\cdot 16}{14\cdot 17}\cdot\frac{19\cdot 20}{18\cdot 21}, \quad \text{etc}\\
\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{IV}} & = & \frac{\pi}{2} & = & \frac{4\cdot 4}{2\cdot 6}\cdot\frac{8\cdot 8}{6\cdot 10}\cdot\frac{12\cdot 12}{10\cdot 14}\cdot\frac{16\cdot 16}{14\cdot 18}\cdot\frac{20\cdot 20}{18\cdot 22}, \quad \text{etc}\\
\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{IV}} & = & 2a & = & \frac{4\cdot 5}{3\cdot 6}\cdot\frac{8\cdot 9}{7\cdot 10}\cdot\frac{12\cdot 13}{11\cdot 14}\cdot\frac{16\cdot 17}{15\cdot 18}\cdot\frac{20\cdot 21}{19\cdot 22}, \quad \text{etc}
\end{array}$$

sein.

§14 Diese Ausdrücke sind schon um Vieles geeigneter um die wahren Werte der Buchstaben a und c näherungsweise zu bestimmen. Für das Finden des Wertes von c scheint aber die Formel $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}$ besonders geeignet, woher

$$\frac{4c}{\pi}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 11}{6\cdot 9}\cdot\frac{7\cdot 15}{8\cdot 13}\cdot\frac{9\cdot 19}{10\cdot 17}, \text{ etc}$$

wird oder

$$\frac{4c}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{21}{20}\cdot\frac{55}{54}\cdot\frac{105}{104}\cdot\frac{171}{170}, \text{ etc,}$$

welche man für die leichtere Berechnung so darstellen kann

$$\frac{4c}{\pi}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{54}\right)\left(1+\frac{1}{104}\right)\left(1+\frac{1}{170}\right) \text{ etc.}$$

Aber die Größe a wird am angenehmsten entweder aus dieser Form

$$\frac{\pi}{4a}=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 7}{3\cdot 9}\cdot\frac{6\cdot 11}{5\cdot 13}\cdot\frac{8\cdot 15}{7\cdot 17}\cdot\frac{10\cdot 19}{9\cdot 21} \text{ etc}$$

oder aus

$$\frac{\pi}{4a}=\frac{6}{5}\cdot\frac{28}{27}\cdot\frac{66}{65}\cdot\frac{120}{119}\cdot\frac{190}{189} \text{ etc,}$$

die man auf angenehme Weise so darstelle

$$\frac{\pi}{4a}=\left(1+\frac{1}{1\cdot 5}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 9}\right)\left(1+\frac{1}{5\cdot 13}\right)\left(1+\frac{1}{7\cdot 17}\right)\left(1+\frac{1}{9\cdot 21}\right) \text{ etc;}$$

oder man wird die Größe a mit dem gleichen Erfolg aus der Formel $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$ bestimmen, welche

$$2a = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 13}{7 \cdot 11} \cdot \frac{8 \cdot 17}{9 \cdot 15} \cdot \frac{10 \cdot 21}{11 \cdot 19} \text{ etc}$$

gibt oder

$$2a = \frac{10}{9} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{78}{77} \cdot \frac{136}{125} \cdot \frac{210}{208} \text{ etc}$$

oder

$$2a = \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3}\right)\left(1 + \frac{1}{5 \cdot 7}\right)\left(1 + \frac{1}{7 \cdot 11}\right)\left(1 + \frac{1}{9 \cdot 15}\right)\left(1 + \frac{1}{11 \cdot 19}\right) \text{ etc.}$$

Dennoch würde man eine sehr ekelhafte Rechnung brauchen, wenn wir die Werte dieser Buchstaben bis hin auf den Millionsten Teil der Einheit genau berechnen wollten; aber unten werden sich, weil wir noch außergewöhnlichere Eigenschaften dieser Kurve entdecken werden, diese Werte hinreichend schnell bekommen lassen.

§15 Aber für denselben Zweck können wir in der Tat die für a und c oben in §10 gefundenen Reihen mit sehr großen Erfolg benutzt werden, obwohl die Terme an sich wenig schrumpfen, deshalb weil in diesen Reihen die Zeichen $+$ und $-$ alternieren. Daher entsteht nämlich ein ausgezeichnetes Hilfsmittel um die Summen dieser Reihen näherungsweise zu finden. Wenn man nämlich eine Reihe dieser Art hat

$$A - A' + A'' - A''' + A'''' - A''''' \quad \text{etc,}$$

deren Terme A, A', A'', A''' immer kleiner werden, dann bilde man daraus die Reihe der Differenzen

$$A - A' = B, \quad A' - A'' = B', \quad A'' - A''' = B'', \quad \text{etc}$$

und daraus die Reihe der zweiten Differenzen

$$B - B' = C, \quad B' - B'' = C', \quad B'' - B''' = C'', \quad \text{etc}$$

und man nehme auf diese Weise weiter die Differenzen, dann wird die Summe der vorgelegten Reihe immer

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{C}{8} + \frac{D}{16} + \frac{E}{32} + \text{etc}$$

sein.

§16 Um nun diese Regel auf die Reihen in §10 anzuwenden, wollen wir die einzelnen Terme, die dort auftauchen, in Dezimalbrüche entwickeln:

$$\frac{1}{2} = 0,500000$$
$$\frac{1^2}{2^2} = 0,250000$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3}{4} = 0,187500$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} = 0,140625$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5}{6} = 0,117188$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} = 0,097657$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7}{8} = 0,085450$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} = 0,074769$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9}{10} = 0,067292$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} = 0,060563$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11}{12} = 0,055516$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} = 0,050890$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13}{14} = 0,047255$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13^2}{14^2} = 0,043880$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13^2}{14^2} \cdot \frac{15}{16} = 0,041138$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13^2}{14^2} \cdot \frac{15^2}{16^2} = 0,038567$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13^2}{14^2} \cdot \frac{15^2}{16^2} \cdot \frac{17}{18} = 0,036424$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13^2}{14^2} \cdot \frac{15^2}{16^2} \cdot \frac{17^2}{18^2} = 0,034400$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13^2}{14^2} \cdot \frac{15^2}{16^2} \cdot \frac{17^2}{18^2} \cdot \frac{19}{20} = 0,032700$$
$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdot \frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{11^2}{12^2} \cdot \frac{13^2}{14^2} \cdot \frac{15^2}{16^2} \cdot \frac{17^2}{18^2} \cdot \frac{19^2}{20^2} = 0,031065$$

§17 Nachdem diese also vorbereitet worden sind, wollen wir die Rechnung für das Finden des Wertes des Buchstabens c anstellen, und weil

$$\frac{2c}{\pi} = 1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{etc}$$

war, wird, nachdem man die ersten beiden Terme auf die linke Seite gebracht hat,

$$\frac{2c}{\pi} - \frac{3}{4} = \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \text{ etc}$$

sein. Man schreibe nun die einzelnen Terme dieser Reihe untereinander und füge diesen die Reihe der mit den Buchstaben B, C, D, etc bezeichneten Buchstaben auf diese Weise bei:

A	B	C	D	E	F	G	H
$0,140625$							
	$0,042968$						
$0,097657$		$0,020080$					
	$0,022888$		$0,011398$				
$0,074769$		$0,008682$		$0,007249$			
	$0,014206$		$0,004149$		$0,004970$		
$0,060563$		$0,004533$		$0,002279$		$0,003595$	
	$0,009673$		$0,001870$		$0,001375$		$0,002709$
$0,050890$		$0,002663$		$0,000904$		$0,000886$	
	$0,007010$		$0,000966$		$0,000489$		$0,000575$
$0,043880$		$0,001697$		$0,000415$		$0,000311$	
	$0,005313$		$0,000551$		$0,000178$		
$0,038567$		$0,001146$		$0,000237$			
	$0,004167$		$0,000314$				
$0,034400$		$0,000832$					
	$0,003335$						
$0,031065$							

§18 Daher wird man also die Summe unserer Reihe auf die folgende Weise berechnen:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}A & = & 0,070312 \\ \frac{1}{4}B & = & 0,010742 \\ \frac{1}{8}C & = & 0,002510 \\ \frac{1}{16}D & = & 0,000712 \\ \frac{1}{32}E & = & 0,000227 \\ \hline & & 0,084503 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & & 0,084503 \\ \frac{1}{64}F & = & 0,000078 \\ \frac{1}{128}G & = & 0,000028 \\ \frac{1}{256}H & = & 0,000011 \\ \text{für die übrigen} & = & 0,000007 \\ \hline & & 0,084627 \\ \text{füge hinzu } \frac{3}{4} & = & 0,750000 \\ \hline \text{es wird } \frac{2c}{\pi} & = & 0,834627 \end{array}$$

Daher wird also

$$c = \pi \cdot 0,417314 = 1,311031$$

sein.

§19 Auf ähnliche Weise wird das Intervall $AB = CD = a$ berechnet werden. Es war aber

$$\frac{2a}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{7}{8} + \text{etc},$$

wo die ersten beiden Terme

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} = 0,31250$$

auf die andere Seite rübergebracht

$$\frac{2a}{\pi} = 0,312500 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \text{etc}$$

geben, woher man die Rechnung auf folgende Weise anstelle:

A	B	C	D	E	F	G	H
0,117188							
	0,031738						
0,085450		0,013580					
	0,018158		0,007198				
0,067292		0,006382		0,004331			
	0,011776		0,002867		0,002835		
0,055516		0,003515		0,001496		0,001969	
	0,008261		0,001371		0,000866		0,001405
0,047255		0,002144		0,000630		0,000564	
	0,006117		0,000741		0,000302		
0,041138		0,001403		0,000328			
	0,004714		0,000413				
0,036424		0,000990					
	0,003724						
0,032700							

§20 Daher berechnet man also für die Summe dieser Reihe:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}A & = & 0{,}058594 \\
\frac{1}{4}B & = & 0{,}007934 \\
\frac{1}{8}C & = & 0{,}001697 \\
\frac{1}{16}D & = & 0{,}000450 \\
\frac{1}{32}E & = & 0{,}000135 \\
\hline
 & & 0{,}068810
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
 & & 0{,}068810 \\
\frac{1}{64}F & = & 0{,}000044 \\
\frac{1}{128}G & = & 0{,}000015 \\
\frac{1}{256}H & = & 0{,}000005 \\
\hline
 & & 0{,}068874 \\
\text{addier } \frac{5}{16} & = & 0{,}312500 \\
\hline
\text{es wird } \frac{2a}{\pi} & = & 0{,}381374
\end{array}$$

daher also

$$a = \pi \cdot 0{,}190687 = 0{,}599061$$

§20[a] Nachdem die wahren Werte dieser Größen a und c näherungsweise gefunden worden sind, welche ich aber noch lehren werden, die genauer zu bestimmen, schreite ich zu jenen merkwürdigeren Eigenschaften dieser Kurve voran, die ich versprochen habe zu beweisen, welche sich natürlich durch gewohnte Rechenschritte kaum und freilich nicht einmal kaum finden lassen und deshalb mit Recht von sehr großer Bedeutung anzusehen sind.

Und zuerst werde ich hier freilich diese ausgezeichnete Relation, die zwischen den 3 hauptsächlichen Größen dieser Kurve, natürlich der Höhe $BC = AD$ und zwischen der Breite $AB = CD$ und der Länge AMC selbst der Kurve einhergeht und die ich schon vor einiger Zeit entdeckt habe, hier genauer auslegen und im folgenden Theorem darstellen.

THEOREM 1

§21 Bei dieser Curva elastica AMC, deren Scheitel A ist und das Zentrum der Höhe C, hängen die 3 grundsätzlichen Größen, welche 1) die Höhe $BC = AD$, 2) die Breite $AB = CD$ und 3) die Länge des Bogen AMC sind, so voneinander ab, dass das Rechteck aus der Breite AB und Höhe des Bogens AMC gleich der Fläche des Kreises der um den Durchmesser der Höhe beschrieben wurde, ist oder es wird, nachdem, wie wir es gemacht haben, $BC = AD = 1$, $AB = CD = a$ und der Bogen $AMC = c$ gesetzt wurden, $ac = \frac{\pi}{4}$ sein.

BEWEIS

§22 Diese außergewöhnliche Eigenschaft leitet man von den ab, die wir oben durch ins Unendliche laufende Produkte (§13) ausgedrückt haben, deren erste

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 7}{5 \cdot 8} \cdot \frac{10 \cdot 11}{9 \cdot 12} \cdot \frac{14 \cdot 15}{13 \cdot 16} \quad \text{etc}$$

gab, die letzte aber

$$2a = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 6} \cdot \frac{8 \cdot 9}{7 \cdot 10} \cdot \frac{12 \cdot 13}{11 \cdot 14} \cdot \frac{16 \cdot 17}{15 \cdot 18} \quad \text{etc.}$$

Wenn also schon im ersten Ausdruck der erste einfache Faktor $\frac{1}{2}$ getrennt dargestellt wird, aus den übrigen folgenden aber je zwei miteinander kombiniert werden, wird man

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \frac{7 \cdot 10}{8 \cdot 9} \cdot \frac{11 \cdot 14}{12 \cdot 13} \cdot \frac{15 \cdot 18}{16 \cdot 17} \quad \text{etc}$$

haben. Wenn daher also dieser Ausdruck mit dem anderen multipliziert wird, heben sich natürlich alle Faktoren bis auf den ersten gegenseitig auf, sodass $\frac{8ac}{\pi} = 2$ hervorgehen wird, woher

$$ac = \frac{\pi}{4}$$

wird, welches jene Eigenschaft selbst ist, die gezeigt werden sollte.

§23 Auch wenn diese Wahrheit auf eine völlig einzigartige Weise aus der Betrachtung des Unendlichen gefolgert worden ist, habe ich dennoch anschließend bemerkt, dass dieselbe auch durch üblichere Rechenschritte gefunden werden kann. Wir wollen nun nämlich im Allgemeinen für einen unbestimmten Punkt M der Kurve das Produkt aus der Ordinate $PM = y$ und dem Bogen $CM = s$ suchen und es sei dieses Produkt $P = ys$; es wird $\mathrm{d}P = y\mathrm{d}s + s\mathrm{d}y$ sein und daher wieder durch Integrieren

$$P = \int y\mathrm{d}s + \int s\mathrm{d}y,$$

welche beiden Formeln wir getrennt entwickeln wollen. Für die erste haben wir anfangs gezeigt, dass

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 7}x^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 11}x^{11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 15}x^{15} + \text{etc}$$

ist, welche Reihe mit $\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ multipliziert man termweise so integriere, dass nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, vom welchen Fall sich ja der Fall unseres Theorems dreht.

§24 Für diese Untersuchung werden wir aber

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} = \frac{1}{2}$$

haben, nachdem $x = 1$ gesetzt wurde; dann haben wir aber im Allgemeinen gesehen, dass (§11)

$$\int \frac{x^{n+3}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n}{n+2}\int \frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist, woher wir abgeleitet haben:

$$\int \frac{x^7\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{11}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{15}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{12}{14} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2}$$

Daher wird also für unseren Fall, in dem $x = 1$ ist,

$$\int y\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{19}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2} + \text{etc}$$

sein, welche Reihe auf die folgende Form reduziert wird:

$$\int y\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 15} + \frac{1}{9\cdot 19} + \text{etc}\right).$$

Auf dieselbe Weise entwickle man die andere Formel $\int s\mathrm{d}y$, und weil durch die erste Reihe

$$s = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{13}x^{13} + \text{etc}$$

war, aber in der Tat $\frac{xx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = y$, wird man durch gliedweises Integrieren mithilfe der zuvor gegebenen Formeln für den Fall $x = 1$

$$\int s\mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}$$

finden, welche Reihe man zur folgenden Form zusammenfasst

$$\int s\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{7\cdot 13} + \frac{1}{9\cdot 17} + \frac{1}{11\cdot 21} + \dots\right).$$

Nachdem also diese zwei Reihen verbunden worden sind, wird

$$P = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 13} + \text{etc}\right)$$

werden.

§25 Wenn also in dieser Reihe zwei aufeinander folgende Terme zu einem zusammengefasst werden, wird man die folgende Reihe erhalten

$$P = ys = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{2}{9\cdot 11} + \frac{2}{13\cdot 15} + \frac{2}{17\cdot 19} + \text{etc}$$

erhalten. Weil ja aber weiter

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{2}{5\cdot 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \quad \frac{2}{9\cdot 11} = \frac{1}{9} - \frac{1}{11}, \quad \text{etc}$$

ist, wird diese Reihe zu dieser Form aufgelöst

$$P = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc;}$$

weil diese die allbekannte Leibniz'sche Reihe ist, deren Summe gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, wird

$$P = ys = \frac{\pi}{4}$$

sein, natürlich in dem Fall, in dem $x = 1$ ist. Aber in diesem Fall haben wir angenommen, dass $y = a$ und $s = c$ wird und so ist daher klar, dass das Produkt $ac = \frac{\pi}{4}$ ist.

Vorbereitung für die folgenden noch merkwürdigeren Eigenschaften dieser Kurve

§26 In der Abhandlung, welcher der Titel „ Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrale $\int \frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{1+mzz+nz^4}}$ contentarum" für den zweiten Teil der „Actorum" für das Jahr 1781 gegebenen worden war, habe ich gezeigt, wenn $\Pi : z$ den so genommenen Wert dieser Integralformel

$$\int \frac{\mathrm{d}z(\alpha + \beta zz)}{\sqrt{1 + mzz + nz^4}}$$

bezeichnet, dass sie für $z = 0$ gesetzt verschwindet, dass dann viele transzendente Größen dieser Art auf völlig einzigartige Weise untereinander verglichen werden können. Wenn natürlich zwei Formeln $\Pi : x$ und $\Pi : y$ dieser Art vorgelegt waren und aus den Buchstaben x und y so ein dritter bestimmt wird, dass

$$z = \frac{x\sqrt{1 + myy + ny^4}}{1 - nxxyy} + \frac{y\sqrt{1 + mxx + nx^4}}{1 - nxxyy}$$

ist, woher

$$\sqrt{1 + mzz + nz^4}$$
$$= \frac{(mxy + \sqrt{(1 + mxx + nx^4)(1 + myy + ny^4)})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2}$$

wird, dann wird immer

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + \beta xyz,$$

sodass die transzendente Größe $\Pi : z$ die Summe der gegebenen $\Pi : x$ und $\Pi : y$ um die algebraische größe βxyz übersteigt.

§27 Es ist nun klar, dass die allgemeinen Formeln auf zweifache Weise auf unsere Aufgabe angewendet werden können, natürlich so um die Bögen dieser Kurven wie um die Ordinalen, die der Abszisse z entsprechen, untereinander zu vergleichen. Für jeden der beiden Fälle wird aber $m = 0$ und $n = -1$ sein, dann wird aber im Zähler für die Bögen $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ genommen werden müssen, aber für die Ordinaten $\alpha = 0$ und $\beta = 1$.

§28 Wenn nun also der Buchstaben z eine gewisse auf der Achse CB angenommene Abszisse bezeichnet, wollen wir die ihr entsprechende Ordinate mit dem Charakter $\Pi : z$ bezeichnen, den entsprechenden Bogen aber mit dem Charakter $\Theta : z$ und es wird aus der Gestalt unserer Curva elastica

$$\Pi : z = \int \frac{zzdz}{\sqrt{1-z^4}} \quad \text{und} \quad \Theta : z = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

sein, welche Charaktere wir im folgenden gebrauchen werden. Dann wird also für $z = 0$ genommen

$$\Pi : 0 = 0 \quad \text{und} \quad \Theta : 0 = 0$$

sein. Für $z = 1$ genommen wird aber

$$\Pi : 1 = AB = a \quad \text{und} \quad \Theta : 1 = CA = c$$

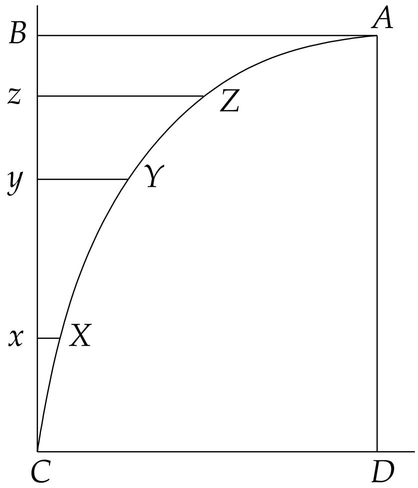
sein. Außerdem aber sollte bemerkt werden, dass, nachdem eine negative Abszisse z genommen wurde, so die Ordinate wie Länge des Bogens auch negativ sein wird; und so wird $\Pi : (-z) = -\Pi : z$ sein und auf die gleiche Weise $\Theta : (-z) = -\Theta : z$. Nachdem das also vorausgeschickt wurde, werden wir diesen zweifachen Vergleich in den folgenden Problemen auf unsere Angelegenheit anwenden.

PROBLEM 1

§29 Nachdem auf unserer Curva elastica zwei Bögen CX und CY vorgelegt worden sind, ist ein Bogen CZ zu finden, der der Summe des Bogens $CX + CY$ gleich sei.

LÖSUNG

Man nenne die diesen Bogen entsprechenden Abszissen $Cx = x$, $Cy = y$ und $Cz = z$ und es werden mit der festgesetzten Bezeichnungsweise die



Ordinaten $xX = \Pi : x$, $yY = \Pi : y$ und $zZ = \Pi : z$ sein, die Bögen selbst aber $CX = \Theta : x$, $CY = \Theta : y$ und $CZ = \Theta : z$, und weil ja gefordert wird, dass $\Theta : z = \Theta : x + \Theta : y$ ist, befiehlt ja die oben erwähnte allgemeine Regel, weil ja in diesem Fall $\beta = 0$ ist, für gegebene Buchstaben x und y so zu bestimmen, dass

$$z = \frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+xxyy}$$

ist, dann wird aber

$$\sqrt{1-z^4} = \frac{(1-xxyy)\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)} - 2xy(xx+yy)}{(1+xxyy)^2}$$

sein, woher klar ist, wie aus zwei gegebenen Abszissen $Cx = x$ und $Cy = y$ die gesuchte z konstruiert werden muss, dass der Bogen CZ gleich der Summe der Bögen $CX + CY$ wird.

§30 So wie wir hier aus gegebenen Abszissen x und y die Abszisse z bestimmt haben, so wird andererseits, wenn die Abszissen x und z gegebenen sind, die dritte y aus ihnen auf die gleiche Weise bestimmt werden. Weil nämlich hier $\Theta : y = \Theta : z - \Theta : x$ sein muss, ist klar, dass hier auf dieselbe Weise y durch z und $-x$ bestimmt wird, wie wir zuvor z durch $+x$ und $+y$ ausgedrückt haben. Daher wird also

$$y = \frac{z\sqrt{1-x^4} - x\sqrt{1-z^4}}{1+xxzz}$$

sein und

$$\sqrt{1-y^4} = \frac{(1-xxzz)\sqrt{(1-x^4)(1-z^4)} + 2xz(xx+zz)}{(1+xxzz)^2}.$$

Und in gleicher Weise wird aus gegebenen y und z die Abszisse x so bestimmt werden, dass

$$x = \frac{z\sqrt{1-y^4} - y\sqrt{1-z^4}}{1+yyzz}$$

ist und

$$\sqrt{1-x^4} = \frac{(1-yyzz)\sqrt{(1-y^4)(1-z^4)} + 2yz(yy+zz)}{(1+yyzz)^2}.$$

§31 Daher ist also klar, dass die 3 Größen x, y und z so zueinander in Beziehung stehen, dass eine beliebige durch die beiden übrigen fast auf die gleiche Weise bestimmt wird; deshalb wollen wird diese Relation genauer entwickeln, damit besser klar wird, wie sie voneinander abhängen. Aus den ersten Werten aber wird nach dem Quadrieren

$$zz = \frac{(xx+yy)(1-xxyy) + 2xy\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)}}{(1+xxyy)^2}$$

sein; aus dem Wert der Formel $\sqrt{1-x^4}$ aber berechnet man

$$\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)} = \frac{(1+xxyy)^2\sqrt{1-z^4} + 2xy(xx+yy)}{1-xxyy};$$

wenn dieser Wert dort abgezogen wird, wird diese Gleichung

$$zz(1-xxyy) = xx + yy + 2xy\sqrt{1-z^4}$$

entstehen. Und auf ähnliche Weise wird aus den beiden übrigen Bestimmungen

$$yy(1-xxzz) = zz + xx - 2xz\sqrt{1-y^4}$$

und

$$xx(1-yyzz) = yy + zz - 2yz\sqrt{1-x^4}$$

werden.

§32 Wenn wir also diese Gleichungen von jeder Irrationalität befreien, wird aus den einzelnen die selbe rationale entstehen, welche

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} + & x^4 & - & 2xxyy & + & 2x^4yyzz & + & x^4y^4z^4 \\ + & y^4 & - & 2xxzz & + & 2xxy^4zz & & \\ + & z^4 & - & 2yyzz & + & 2xxyyz^4 & & \end{array}\right\} = 0$$

sein wird und die auch so ausgedrückt werden kann

$$0 = \left\{ \begin{matrix} x^4 + y^4 + z^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2yyzz \\ +2xxyyzz(xx + yy + zz) + x^4y^4z^4 \end{matrix} \right\},$$

wo natürlich schon die 3 Buchstaben x, y und z in gleicher Weise eingehen; denn weil ja hier nur die Quadrate der Buchstaben x, y, z enthalten sind, ist es völlig dasselbe, ob diese nun negativ oder positiv genommen werden.

§33 Sooft also drei Abszissen $Cx = x$, $Cy = y$ und $Cz = z$ zueinander in dem Verhältnis stehen, welches wir angegeben haben, dann wird der Bogen CZ immer der Summe der beiden übrigen CX und CY gleich werden. Weil also daher $CZ - CY = CX$ ist, wird der Bogen $YZ = CX$ sein, woher, wenn die Punkte Y und Z nach Belieben angenommen werden, vom Punkt C aus in ein Bogen CX abgetrennt werden kann, der dem Bogen YZ gleich sein wird. Und andererseits wird, nachdem ein Bogen CX vorgelegt worden ist, von jedem gegebenen Punkt aus jenem Bogen CX ein gleicher Bogen YZ abgetrennt werden können. Wenn aber der Punkt z als gegebenen betrachtet wird, wird von diesem umgekehrt jenem Bogen CX selbst ein gleicher Bogen ZY abgetrennt werden können; weil das hinreichend klar ist, wäre es überflüssig, dafür ein eigenes Problem festzusetzen.

THEOREM 2

§34 Wenn 3 Abszissen $Cx = x$, $Cy = y$, $Cz = z$ so angenommen werden, dass der Bogen CZ der Summe CX und CY gleich wird, dann werden die 3 Ordinaten $xX = \Pi : x$, $yY = \Pi : y$, $zZ = \Pi : z$ so zueinander in Beziehung stehen, dass

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + xyz$$

ist oder es wird

$$zZ = xX + yY + \frac{Cx \cdot Cy \cdot Cz}{CB^2}$$

sein.

BEWEIS

§35 Weil die Relation zwischen den Formeln $\Pi : x$, $\Pi : y$ und $\Pi : z$ dieselbe Relation zwischen den Abszissen x, y und z liefert, die wir für die Formeln

$\Theta : x$, $\Theta : y$ und $\Theta : z$ angegebenen haben, weil ja für diesen Fall der Buchstabe β in unserer allgemeinen verwendeten Form der Einheit gleich wird, wird vermöge der allgemeinen Relation

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + xyz$$

sein, woher, um die Homogenität zu bemerken, weil ja die Höhe CB als die Einheit definiert worden ist, der Rest xyz durch sein Quadrat geteilt werden muss, woher

$$zZ = xX + yY + \frac{Cx \cdot Cy \cdot Cz}{CB^2}$$

werden wird.

Problem 2

§36 Weil also diese Charaktere $\Theta : z$ und $\Pi : z$ bestimmte transzendente Funktionen der Abszisse z bezeichnen, welche bekannt sind weder durch Logarithmen noch durch Kreisbögen ausgedrückt werden zu können, weil sie ja durch die Integralformeln

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}} \quad \text{und} \quad \int \frac{zz\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

bestimmt werden, wird es förderlich sein, deren Werte zumindest durch unendliche Reihen beschafft zu haben; es wird aber durch die erste Weise

$$\Theta : z = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} z^9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13} z^{13} + \text{etc}$$

sein und

$$\Pi : z = \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} z^7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} z^{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} z^{15} + \text{etc.}$$

Aus der anderen Auflösung wird aber aus §8

$$\Theta : z = \left(z + \frac{3}{5} z^5 + \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 9} z^9 + \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{5 \cdot 9 \cdot 13} z^{13} + \text{etc} \right) \sqrt{1-z^4}$$

und

$$\Pi : z = \left(\frac{1}{3} z^3 + \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 7} z^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 7 \cdot 11} z^{11} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15} z^{15} + \text{etc} \right) \sqrt{1-z^4}$$

sein.

PROBLEM 2

§37 Die Grundgrößen unserer Curva elastica, natürlich die Länge $AB = a$ und der ganze Bogen $CA = c$, sind in Bezug auf die Höhe $CB = 1$ genauer zu bestimmen, als es sich oben machen ließ.

LÖSUNG

Für dieses Ziel nehme man den Punkt Z im Scheitel A der Kurve, dass $z = 1$ wird, und es wird

$$\Pi : z = AB = a \quad \text{und} \quad \Theta : z = CA = c$$

sein; dann wird also $\sqrt{1 - z^4} = 0$ sein. Nun suche man die beiden Bögen CX und CY, deren Summe gleich dem Bogen $CA = c$ sei. Nachdem also deren Abszisse $Cx = x$ und $Cy = y$ gesetzt worden sind, wird

$$1 - xx - yy - xxyy = 0$$

sein, woher

$$yy = \frac{1 - xx}{1 + xx}$$

wird. Wenn daher also y auf diese Weise durch x bestimmt wird, dann wird

$$\Theta : x + \Theta : y = c$$

sein; dann wird in der Tat wegen $\Pi : z = a$

$$a = \Pi : x + \Pi : y + xy$$

sein.

§38 Damit nun die Reihen für $\Theta : x$ und $\Theta : y$, genauso wie die für $\Pi : x$ und $\Pi : y$ besonders konvergent gemacht werden, wollen wir einander fast gleiche Abszissen x und y annehmen. Wenn wir nämlich $y = x$ setzen wollten, würde $x = y = \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}$ hervorgehen, welcher irrationale Wert keinesfalls geeignet wäre, um unsere Reihe zu entwickeln. Deswegen wollen wir für xx gleich $\frac{1}{2}$ nehmen; es wird $yy = \frac{1}{3}$ sein und daher $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und auch $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, woher die ersten Reihen

$$\Theta : x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} \cdot \frac{1}{2^6} + \text{etc} \right)$$

$$\Pi : x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15} \cdot \frac{1}{2^6} + \text{etc} \right)$$

werden. Auf ähnliche Weise werden aber

$$\Theta : y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{2\cdot 5} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13} \cdot \frac{1}{3^6} \text{etc} \right)$$

$$\Pi : y = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11} \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15} \cdot \frac{1}{3^6} \text{etc} \right)$$

sein.

§39 Diese Reihen konvergieren natürlich so sehr, dass, wer die Mühen der Rechnung auf sich nehmen wollte, die wahren Werte der Buchstaben a und c so genau bestimmen kann, wie es beliebt; die Werte aber, die wir oben angegeben haben, weichen schon so wenig von der Wahrheit ab, dass sie für unser Anliegen mehr als ausreichen, weil ja hier nur darüber gehandelt wird, dass die gefundenen Werte durch überlegtes Rechnen geprüft werden können; deswegen wollen wir nun zu anderen außergewöhnlichen Eigenschaften dieser Kurve voranschreiten.

PROBLEM 3

§40 Nachdem auf der Curva elastica ein Bogen PQ vorgelegt worden ist, ist von einem gegebenen Punkt R ein Bogen RS abzutrennen, der jenem Bogen PQ gleich sei.

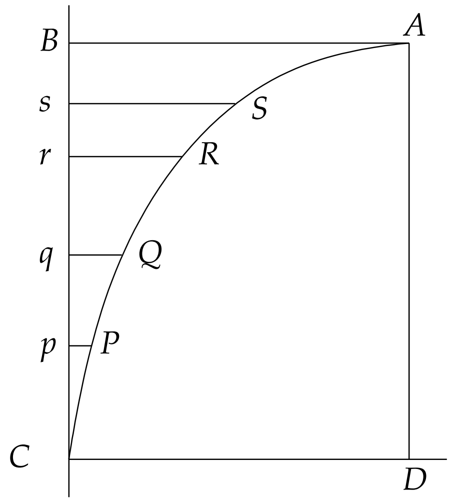
LÖSUNG

Weil ja also auf der Kurve vier zu betrachtende Punkte P, Q, R, S eingehen, seien die jenen entsprechenden Abszissen $CP = p$, $Cq = q$, $Cr = r$, $Cs = s$, für welche wir der Kürze wegen irrationale Formeln setzen wollen: $\sqrt{1-p^4} = P$, $\sqrt{1-q^4} = Q$, $\sqrt{1-r^4} = R$ und $\sqrt{1-s^4} = S$. Nachdem diese so gesetzt worden sind, ist gefordert, weil ja der Bogen RS dem Bogen PQ gleich sein muss, dass

$$CS - CR = CQ - CP$$

ist, das heißt

$$\Theta : s - \Theta : r = \Theta : q - \Theta : p$$



ist; damit wir dieser Gleichung durch die oben gegebene Regel genüge leisten, wollen wir einen Bogen $\Theta : v$ suchen, dass

$$\Theta : v = \Theta : q - \Theta : p$$

ist und nach den oberen Vorschriften muss

$$v = \frac{qP - pQ}{1 + ppqq}$$

sein, woher

$$\sqrt{1 - v^4} = V = \frac{(1 - ppqq)PQ + 2pq(pp + qq)}{(1 + ppqq)^2}$$

wird. Nachdem dieser Bogen gefunden worden ist, muss $\Theta : s = \Theta : r + \Theta : v$ sein; daher wird durch dieselben Vorschriften

$$s = \frac{rV + vR}{1 + rrvv}$$

werden und daher weiter

$$S = \frac{(1 - rrvv)RV - 2rv(rr + vv)}{(1 + rrvv)^2}.$$

Wir wollen nun in diesen Formeln die für v und V gefundenen Werte setzen; und zuerst wird

$$1 + rrvv = \frac{(1 + ppqq)^2 + rrppQQ + rrqqPP - 2rrpqPQ}{(1 + ppqq)^2}$$

sein, welche Gleichung, wenn anstelle von PP und QQ die Werte eingesetzt werden, auf diese zurückgeführt wird

$$1 + rrvv = \frac{(1 + ppqq)^2 + rr(pp + qq)(1 - ppqq) - 2pqrrPQ}{(1 + ppqq)^2}.$$

Aber es wird in der Tat für den Zähler

$$rV + vR = \frac{r(1 - ppqq)PQ + 2pqr(pp + qq) + (qPR - pQR)(1 + ppqq)}{(1 + ppqq)^2}$$

sein, als logische Konsequenz wird die Abszisse $CS = s$ so ausgedrückt werden:

$$s = \frac{r(1-ppqq)PQ + 2pqr(pp+qq) + (qPR - pQR)(1+ppqq)}{(1+ppqq)^2 + rr(pp+qq)(1-ppqq) - 2pqrrPQ}.$$

Was aber den Wert des Buchstaben S angeht, so ersparen wir uns seine Entwicklung, weil wir ihn ja in unserer Rechnung nicht untersuchen wollen.

§41 Daher wollen wir also sehen, wie die Abszisse s durch die drei gegebenen Abszissen p, q und r ausgedrückt wird; dort ist freilich der größte Unterschied, dass die Buchstaben p, q, r darin gleichermaßen eingehen, obwohl man dennoch aus der vorgelegten Gleichung

$$\Theta : s = \Theta : r + \Theta : q - \Theta : p$$

einsieht, dass diese Buchstaben p, q und r auf die gleiche Weise in den Wert von s eingehen müssen, wenn nur der Buchstabe p negativ angenommen werden würde. Und es besteht also kein Zweifel, dass die gefundene Form so transformiert werden kann, dass die Gleichheit der Buchstaben p, q und r sich erhält; das ist dennoch keinesfalls klar.

42 Weil aber $\Theta : s = \Theta : r + \Theta : q - \Theta : p$ sein muss, ist klar, dass, während der Buchstaben p fest bleibt, die übrigen beiden q und r untereinander vertauscht werden können, woher auch dieser Ausdruck wahr sein muss

$$s = \frac{q(1-pprr)PR + 2pqr(pp+rr) + (rPQ - pQR)(1+pprr)}{(1+pprr)^2 + qq(pp+rr)(1-pprr) - 2prqqPR}.$$

Darauf werden, während r fest bleibt, die Buchstaben p und q vertauscht werden können, wenn $-p$ anstelle von q und $-q$ anstelle von p geschrieben wird; dann wird aber

$$s = \frac{-p(1-qqrr)QR + 2pqr(qq+rr) + (qPR + rPQ)(1+qqrr)}{(1+qqrr)^2 + pp(qq+rr)(1-qqrr) + 2qrppQR}$$

sein. Und diese drei Ausdrücke, wie verschieden sie auch scheinen, drücken dennoch sicher denselben Wert aus.

§43 Hier ergibt sich also die ausgezeichnete analytische Frage, wie diese 3 Ausdrücke behandelt werden müssen, dass diese perfekte Kommutativität zwischen den 3 Buchstaben p, q, r durchschaut wird. Man sieht freilich leicht ein, wenn diese 3 Ausdrücke miteinander multipliziert werden, sodass das Produkt dem Kubus s^3 gleich wird, dass dann so im Zähler wie im Nenner die 3 Buchstaben p, q, r in gleicher Weise eingehen werden; aber ein solches Produkt wäre zu kompliziert, als dass es einen einzigen Nutzen haben könnte.

LÖSUNG

§44 Diese Dinge, die bisher über die rechtwinklige Curva elastica behandelt worden sind, werden auch auf alle Curvae elasticae im Allgemeinen angewendet werden können. Weil nämlich für eine gegebene Abszisse die Ordinate gleich

$$\int \frac{\mathrm{d}z(\alpha+\beta zz)}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^2}}$$

ist und der Bogen selbst gleich

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^2}},$$

können die oben angegebenen allgemeinen Vorschriften für den Vergleich dieser transzendenten Größen auf die gleiche Weise angewendet werden können. Dennoch muss hier natürlich noch die notwendige Bedingung besonders bemerkt werden, durch die erfordert wird, dass der Nenner, der entwickelt $\sqrt{1-\alpha\alpha-2\alpha\beta zz-\beta\beta z^4}$ ist, auf diese Form $\sqrt{1+mzz+nz^4}$ zurückgeführt werden kann, was natürlich nicht gemacht werden kann, wenn $1-\alpha\alpha$ nicht eine positive Größe war. In diesen Fällen $\alpha\alpha>1$ werden also alle Vergleiche, welche wie so zwischen den Bogen wie den Ordinaten gelehrt haben, auf die gleiche Weise bei schiefwinkligen Curvae elasticae durchgeführt werden können.